04/05/15.

$\boxed{\text{Ασκήσεις Φυλλάδιο \#5}}$

Ασκ. 3 : Να υπολογιστεί το άθροισμα: $\sum_{d|n} |\mu(d)|$

Λύση: Έστω η συνάρτηση $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\theta(n) = |\mu(n)|$, $n \in \mathbb{N}$.

- $\theta(1) = |\mu(1)| = |1| = 1 \neq 0$
- Αν $(n,m) = 1$, τότε: $\theta(n \cdot m) = |\mu(m \cdot n)| = |\mu(m) \cdot \mu(n)| =$
  $= |\mu(m)| \cdot |\mu(n)| = \theta(m) \cdot \theta(n)$.

$$\boxed{f : \text{πολ/κή} \Rightarrow F(n) = \sum_{d|n} f(d) \ \text{πολ/κή}}$$

Τότε η θ είναι πολ/κή $\Rightarrow$

$\Rightarrow F : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $F(n) = \sum_{d|n} \theta(d) = \sum_{d|n} |\mu(d)|$

είναι πολ/κή.

Τότε αν $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ είναι πρωτ. ανάλ. του $n > 1$, τότε: $F(n) = F(p_1^{a_1}) \cdots F(p_k^{a_k}) =$

$$= \left(\sum_{d|p_1^{a_1}} |\mu(p_1^{a_1})| \right) \cdots \left(\sum_{d|p_k^{a_k}} |\mu(p_k^{a_k})| \right)$$

$$\forall i = 1, \dots, k : \sum_{d|p_i^{a_i}} |\mu(p_i^{a_i})| = \overset{1}{|\mu(1)|} + \overset{|-1|}{|\mu(p_i)|} + \overset{0}{|\mu(p_i^2)|} + \dots + \overset{0}{|\mu(p_i^{a_i})|} =$$

$$= 1 + 1 = 2$$

άρα $\sum_{d|n} |\mu(d)| = F(n) = 2\cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^k$

Αν $n=1$, τότε $\sum_{d|1} |\mu(d)| = 1$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{d|n} |\mu(d)| = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 2^k, & n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} \end{cases}$$

$\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ $\quad \lambda(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k}, & n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} \end{cases}$

(Συνάρτηση Liouville)

Αν f: πολ/κή συνάρτηση, τότε f πλήρως πολ/κή $\Leftrightarrow f^{-1} = \mu\cdot f$

Η συνάρτηση του Liouville είναι πλήρως πολ/κή.

Ασκ. 7 : $\sum_{d|n} \mu(d)\lambda(d) = \sum_{d|n} \lambda^{-1}(d) = \sum |\mu(d)| = 2^k$

όπου $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ εαν πχ

Λύση : Θ.δ.ο. $\lambda^{-1}(n) = |\mu(n)|$, $\forall n \geq 1$. (πρωτ. ανάλυση)

Επειδή λ πλήρως πολ/κή τότε $\lambda^{-1} = \mu\cdot\lambda$

- $n=1 \Rightarrow \lambda^{-1}(1) = \frac{1}{\lambda(1)} = 1 = 1\cdot 1 = \mu(1)\cdot\lambda(1) = |\mu(1)|$.

- Αν $\exists\, m \in \mathbb{N} : m^2 | n$, τότε $\mu(n) = 0 \Rightarrow |\mu(n)| = 0$

  τότε $\lambda^{-1}(n) = \mu(n)\cdot\lambda(n) = 0\cdot\lambda(n) = 0$

- $n = p_1 \ldots p_k$: πρωτ. ανάλυση του n:

  $\lambda^{-1}(n) = (\mu\cdot\lambda)(n) = \mu(n)\cdot\lambda(n) = (-1)^k(-1)^{\overbrace{1+\ldots+1}^{k}} =$

  $= (-1)^k\cdot(-1)^k = 1 = |\mu(n)| =$

  $= |(-1)^k|$

  άρα $\forall n \geq 1$ ισχύει ότι:

  $\sum_{d|n} \lambda^{-1}(d) = \sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^k$ (από την προηγ. άσκηση)

$$\sum_{d|n} \mu(d)\cdot\lambda(d) = \sum_{d|n} (\mu\cdot\lambda)(d) \xlongequal{\lambda \text{ πλήρως πολλική}} \sum_{d|n} \lambda^{-1}(d).$$

α) Λύσ

$$\sum_{d|n} \mu(d)\lambda(d) = (1-\lambda(p_1))\cdots(1-\lambda(p_k)) =$$
$$= (1-(-1))(1-(-1))\cdots(1-(-1)) =$$
$$= \underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{k} = 2^k$$

$\boxed{f \text{ πολλική} \Rightarrow \sum_{d|n} \mu(d)f(d) = (1-f(p_1))\cdots(1-f(p_k)) \text{ όταν } n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}}$

$\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^m : p: \text{πρώτος}, m\in\mathbb{N} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

Συνάρτηση Mangoldt.

Ασκ ⑧ $\Rightarrow \boxed{\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)}$ (*)

Ασκ. ⑨ : $\Lambda(n) = -\sum_{d|n} \mu(d)\cdot\log d$

f, g αριθ. συν/σεις τότε
$g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ $\forall n\geq 1$ $\Leftrightarrow$ $f(n) = \sum_{d|n}\mu(d) g(\frac{n}{d})$, $\forall n \geq 1$ (τύπος αντιστροφής του Möbius)

Τύπος Αντιστροφής του Möbius: $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n\geq 1$: $\Lambda(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\log(n/d) = \sum_{d|n}\mu(d)(\log n - \log d) =$

$= \sum_{d|n}\mu(d)\log n - \sum_{d|n}\mu(d)\log d$

Αρκεί νδο $\sum_{d|n}\mu(d)\log n = 0$

Είναι: $\sum_{d|n}\mu(d)\log n = \log n \cdot \sum_{d|n}\mu(d) = \log n \sum_{d|n}\mu(d)v(\frac{n}{d}) =$

$= \log n\,(\mu * v)(n) = \log n * \varepsilon(n) = 0$, $\forall n\geq 1$

διότι αν $n=1 \Rightarrow \log 1 = 0$ ενώ αν $n>1 \Rightarrow \varepsilon(n) = 0$

Ασκ. 10: f: πλήρως πολλ/κή συνάρτηση. Να υπολογιστεί το $\sum_{d|n} f^{-1}(d)$

Λύση: f πλήρως πολλ/κή $\Rightarrow f^{-1} = \mu \cdot f$. Τότε:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{d|n} f^{-1}(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot f(d) \\ \text{Επειδή } f \text{ πολλ/κή} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu(1)\cdot f(1) = 1, & \text{αν } n=1 \\ (1-f(p_1))(1-f(p_2))\cdots(1-f(p_r)), & \text{αν } n = p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r} \end{cases}$$

Ασκ. 14: ① $\mu = \nu^{-1}$, ② $\tau = \nu * \nu$, ③ $\tau^{-1} = \mu * \mu$, ④ $\sigma = \nu * i$, ⑤ $i * i = i \cdot \tau$, ⑥ $\varphi = \mu * i$, ⑦ $\sigma = \varphi * \tau$, ⑧ $\sigma * \varphi = i * i$

Λύση ① Έχει αποδειχθεί

② $(\nu*\nu)(n) = \sum_{d|n} \nu(d)\,\nu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} 1 \cdot 1 = \sum_{d|n} 1 = \tau(n)$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow \tau = \nu * \nu$.

③ ② $\Rightarrow \tau = \nu * \nu \Rightarrow \tau^{-1} = (\nu * \nu)^{-1} \overset{①}{=} \mu * \mu$

④ $\forall n \geq 1$: $(\nu * i)(n) = \sum_{d|n} \nu(n)\, i\left(\frac{n}{d}\right) = \sum 1 \cdot \frac{n}{d} =$

$= \sum_{d|n} \frac{n}{d} = \sum_{d|n} d = \sigma(n)$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow \nu * i = \sigma$.

⑤ $i * i = \sum_{d|n} i(d)\, i\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} d\,\frac{n}{d} = n \cdot \sum_{d|n} d\,\frac{1}{d} =$

$= n \sum_{d|n} 1 = n\,\tau(n) = i(n)\,\tau(n) = (i \cdot \tau)(n)$, $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow i * i = i \cdot \tau$

Θεώρημα Gauss : $\forall n \geq 1: \ n = \sum_{d|n} \varphi(d) \Rightarrow$

$$\Rightarrow i(n) \begin{cases} = \sum_{d|n} \varphi(d) \Rightarrow i(n) = \sum_{d|n} \varphi(d) v\left(\frac{n}{d}\right) = \\ = (\varphi * v)(n) \\ \Rightarrow \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) i\left(\frac{n}{d}\right) = (\mu * i)(n) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{i = \varphi * v}, \ \boxed{\varphi = \mu * i} \ (7)$$

Ασκ. 15

$$\sum T(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) = 1 \quad \kappa' \quad \sum_{d|n} \sigma(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) = n.$$

Λύση: $T(n) = \sum_{d|n} 1 = \sum_{d|n} v(d) \xrightarrow[\text{Αντ. Möbius}]{}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow v(n) = \sum_{n|d} T(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) \\ v(n) = 1, \ \forall n \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\sum_{n|d} T(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) = 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{n|d} i(d) \Rightarrow i(n) = \sum_{d|n} \sigma(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) \\ i(n) = n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{d|n} \sigma(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) = n}$$

Ασκ. 16 : (1) $\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$, (2) $\sum_{d|n} \mu(d)T(d)$, (3) $\sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d)$, (4) $\sum_{d|n} d\mu(d)$.

Λύση:

Υπενθύμιση:

$$f \in M \Rightarrow \sum_{d|n} \mu(d) f(d) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (1-f(p_1)) \cdots (1-f(p_k)) & n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \end{cases} \ (*).$$

(1) $\Rightarrow f(n)=\frac{1}{n}$. Τότε f πολ/κή $\overset{(*)}{\Rightarrow} \sum_{d|n} \mu(d)\cdot\frac{1}{d} =$

$$= \begin{cases} 1, & n=1 \\ \left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right), & n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k} \end{cases}$$

(2) $\sum_{d|n} \mu(d)\,T(n) \overset{(*)}{=} (1-\underbrace{T(p_1)}_{2})\cdots(1-\underbrace{T(p_k)}_{2}) = \underbrace{(1-2)\cdots(1-2)}_{k \text{ φορές}}$
$(n>1)$
$= (-1)^k$

(3) $\sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d) \overset{(*)}{=} (1-\sigma(p_1))\cdots(1-\sigma(p_k)) =$

$= (1-(p_1+1))\cdots(1-(p_k+1)) =$

$= (-p_1)\cdots(-p_k) = (-1)^k p_1\cdots p_k$.

(4) $\sum_{d|n} d\mu(d) = \sum_{d|n} i(d)\mu(d) \overset{(*)}{=} (1-i(p_1))\cdots(1-i(p_k)) =$

$= (1-p_1)\cdots(1-p_k)$.

Ασκ (18): Έστω f,g: αριθ/κ. συναρτήσεις: $f(n)=\sum_{d|n} g(d)$, $\forall n\geq 1$

$$M = \begin{pmatrix} f((1,1)) & \cdots & f((1,n)) \\ \vdots & & \\ f((n,1)) & & f((n,n)) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

Τότε $\boxed{|M| = g(1)\cdot g(2)\cdots g(n)}$

Θεωρούμε τον πίνακα $A=(\alpha_{ij})$ όπου $\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } j|i \\ 0, & \text{αν } j\nmid i \end{cases}$

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$ και άρα $|A| = 1$

κ / i κ' κ / j

$\Leftrightarrow \kappa / (i,j)$

Θεωρούμε τον πίνακα

$B = (b_{ij})$, όπου $b_{ij} = g(j) \cdot a_{ij} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} g(1) & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & g(n) \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{|B| = g(1) \cdot \ldots \cdot g(n)}$$

$$*(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$(B \cdot A^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \cdot a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} g(k) a_{ik} a_{jk} = \sum_{k \mid (i,j)} g(k) =$$

$$= f((i,j))$$

Είναι: $(B \cdot A^t)_{ij} = M_{ij}$, $\forall i,j = 1, \ldots, n \Rightarrow B \cdot A^t = M. \Rightarrow$

$$\Rightarrow |M| = |B \cdot A^t| = |B| \cdot |A|^t = \overbrace{|A|}^{1} \cdot |B| = |B| = g(1) \cdot \ldots \cdot g(k)$$